ＥＡ　解析学・位相序説　　講義報告[4]

２００８年3月9日（日）　１４：３０－１７：３０

前回の最後に定義した局所凸線形空間のセミノルムを理解するための練習問題を取り上げた。次に有向集合から位相空間特に局所凸線形空間への写像として定義されるネットの収束と $Cauchy$ ネットの概念について扱った。最後にネットにより、局所凸線形空間上の無限和を定義し、$Banach$ 空間上で無限和が収束するための判定条件となる「$Cauchy$ の判定則」を証明した。

定義 3.3 (局所凸線形空間). E を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする。E にセミノルムの集合 $\eta = \{\eta_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ が与えられているとき、E に η のメンバーを一斉に連続にする始位相 $\mathfrak{O}_\eta$ を η で定まる**局所凸線形空間**という。

一般に線形位相空間では、原点の基本近傍系により完全に位相が決定する。すなわち、$\{W_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ を原点の基本近傍系とすれば、$\forall x \in E$ の基本近傍系は $\{x + W_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ となる。

練習問題 3.1.　*1.* ϕ を線型空間 E 上の $\mathbb{R}-$ 線形形式とするとき、

$$\eta_\phi(v) = |\phi(v)| \quad for \quad \forall v \in E$$

とするとき、η_ϕ は E 上のセミノルムになることを示せ。

2. 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\eta_k(v) = |\langle v, e_k\rangle| \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とおく。ただし、$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルとする。このとき、$\eta = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$ を同時に連続にする始位相は、$\mathbb{R}^n$ のユーグリッド位相に一致することを示せ。

練習問題 3.2. V を線形空間、$\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ を V の基底とする。任意の $v \in V$ に対して、

$$\eta_k(v) = |b_k^*(v)| \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

とおいたとき、$\eta = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$ により定義された位相は、V 上のノルム

$$\|v\|_\infty = \max\{|b_1^*(v)|, |b_2^*(v)|, \cdots, |b_n^*(v)|\}$$

により定まる位相と一致する。かつ、この位相は基底のとり方によらない。

4　有向系（ネット）と無限和

定義 4.1 (有向集合). 順序集合 $(D, \prec)$ が**有向集合**であるとは、

$$x, y \in D \Rightarrow \exists z \in D \quad such\ that \quad x \prec z \text{ かつ、} y \prec z$$

が成立することである。

定義 4.2 (部分有向集合). $(D, \prec)$ を有向集合とする。D の部分集合 D' が D の**部分有向集合**であるとは、

$$\forall x \in D\ \exists y \in D' \quad such\ that \quad x \prec y$$

が成立することである。

[4]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

4.1 ネットとネットの収束

定義 4.3 (ネットとネットの収束). $(D, \prec)$ を有向集合、$(X, \mathfrak{D}(X))$ を位相空間とするとき、有向集合 D から位相空間 X への写像 $\varphi : D \to X$ を**ネット**という。
ネット φ が $c \in X$ に収束するとは、

$$\forall U \in \mathfrak{V}(c), \exists \lambda_U \in D \quad such\ that \quad \varphi(\lambda) \in U \quad for\ \forall \lambda(\lambda_U \prec \lambda)$$

が成立することである。ただし、$\mathfrak{V}(c)$ は c の近傍系とする。

定義 4.4 (局所凸空間値のネット). $(D, \prec)$ を有向集合、$(E, \eta = \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ を局所凸空間とするとき、

1. ネット $\varphi : D \to E$ が $c \in E$ に収束するとは、

$$\forall \eta_\alpha \in \eta, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \lambda_{\alpha\varepsilon} \in D \quad such\ that \quad \eta_\alpha(\varphi(\lambda) - c) < \varepsilon \quad for\ \forall \lambda(\lambda_{\alpha\varepsilon} \prec \lambda)$$

   が成立することである。

2. ネット $\varphi : D \to E$ が *Cauchy* ネットであるとは、

$$\forall \eta_\alpha \in \eta, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \lambda_{\alpha\varepsilon} \in D \quad such\ that \quad \eta_\alpha(\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)) < \varepsilon \quad for\ \forall \lambda(\lambda_{\alpha\varepsilon} \prec \lambda), \forall \mu(\lambda_{\alpha\varepsilon} \prec \mu)$$

   が成立することである。

練習問題 4.1. ネット $\varphi : D \to E$ が収束ネットならば、φ は *Cauchy* ネットになることを示せ。

4.2 局所凸空間における無限和

定義 4.5. (E, η) を局所凸空間、$\{v_i\}_{i\in I}$ を E の無限族とする。I の有限部分集合全体 $\mathfrak{F}(I)$ の任意の元 K に対して、

$$v_K = \sum_{i\in K} v_i$$

とおけば、

$$\Theta : \mathfrak{F}(I) \ni K \longrightarrow v_K = \sum_{i\in K} v_i \in E$$

はネットになる。ネット Θ が $c \in E$ に収束するとき、$\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ は収束するといい、$c = \displaystyle\sum_{i\in I} v_i \in E$ と記す。すなわち、$\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ が $c \in E$ に収束するとは、

$$\forall \eta_\alpha \in \eta, \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathfrak{F}(I) \quad such\ that \quad \eta_\alpha\left(\sum_{i\in J} v_j - c\right) < \varepsilon \quad for\ \forall J(K \subset J) \in \mathfrak{F}(I)$$

が成立することである。

E が $Banach$ 空間のときの総和の理論

定義 4.6. E を $Banach$ 空間とする。$\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ が $c \in E$ に収束するとは、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\varepsilon \in \mathfrak{F}(I) \quad such\ that \quad \left\| \sum_{i \in J} v_j - c \right\| < \varepsilon \quad for\ \forall J(K_\varepsilon \subset J) \in \mathfrak{F}(I)$$

が成立することである。

定理 4.1 ($Cauchy$ の判定則). $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ が収束するための必要十分条件は、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathfrak{F}(I) \quad such\ that \quad \left\| \sum_{i \in J} v_i \right\| < \varepsilon \quad for\ \forall J(J \cap K_\varepsilon = \emptyset) \in \mathfrak{F}(I)$$

が成立することである。

練習問題 4.2. $\{v_i\}_{i\in I} \subset E$ を $Banach$ 空間 E の無限族とするとき、$\displaystyle\sum_{i\in I} \|v_i\|$ が総和可能ならば、$\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ は総和可能である。

練習問題 4.3 (和の一意性). $\{v_i\}_{i\in I} \subset E$ を $Banach$ 空間 E の無限族とするとき、$\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ が総和可能で、$\displaystyle a = \sum_{i\in I} v_i, b = \sum_{i\in I} v_i \in E$ ならば、$a = b$ となることを示せ。

練習問題 4.4. $\{a_i\}_{i\in I}, \{b_i\}_{i\in I} \subset E$ を $Banach$ 空間 E の無限族とするとき、$\displaystyle\sum_{i\in I} a_i, \sum_{i\in I} b_i$ が総和可能ならば、$\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha a_i + \beta b_i)$ は総和可能で、

$$\sum_{i\in I}(\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \left(\sum_{i\in I} a_i \right) + \beta \left(\sum_{i\in I} b_i \right)$$

となることを示せ。

記録　J.S